《线性代数》的典型问题与教学设计

集美大学 朱荣坤

结合线性代数的典型问题，谈几点教学体会.

一、整合知识点

概念多、性质杂，逻辑性强，知识点前后纵横交错，是线性代数的课程特点.教学中要把前后知识点的典型问题进行有效的联系、整合、提升，这对学生大有帮助！

1.行列式的典型问题

主要思路：化简（观察特点、选择作行或列变换？目的：化为三角形或者展开降阶）

重要技巧：①把某一行（列）的倍数加到其余各行（列）；

②把所有行（列）加到同一行（列）；

③逐行（列）相加（减）.

基本方法：①按定义或按某一行（列）展开（先化 0，再展开，展开后注意符号项！）

②化为三角形

常用公式：$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$，$|kA_n|=k^n|A|$，$|-A_n|=(-1)^n|A|$.

典型例题：爪形行列式、非对角线元素全相等的行列式.

掌握了这些基本要点，计算基本类型的行列式就能得心应手.

2.方阵的各种运算性质

矩阵常见的运算有加法、数乘、乘法、逆、转置等，彼此之间既有联系又有区别，教学中可列表如下（表中涉及的符号要求有意义），帮助学生梳理、提升知识点.

方阵 \ 运算	加法	数乘	乘法	逆	转置	伴随
转置	$(A+B)^T=A^T+B^T$	$(kA)^T=kA^T$	$(AB)^T=B^TA^T$	$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$	$(A^T)^T=A$	$(A^T)^*=(A^*)^T$
行列式	$\lvert A+B\rvert\neq\lvert A\rvert+\lvert B\rvert$	$\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$	$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$
逆	$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$	$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$
伴随	$(A+B)^*\neq A^*+B^*$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$	$(AB)^*=B^*A^*$	$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$	$(A^*)^T=(A^T)^*$	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$

3. 初等变换的应用

初等变换是线性代数中的一个极为重要的工具，利用它可以解决许多问题. 通过初等变换，就可以把线性代数的主体内容“串”起来，它是线性代数的教学主线，需要加以强化.

教学中要时刻提醒学生思考这样的问题：初等变换可以解决哪些问题？哪些可作行变换也可列变换？哪些只能行变换？学生特别容易犯错的是：求解时，作列的消法变换；求特征向量时，先对特征多项式做列变换化简，再回到对应的矩阵形式去求解齐次方程组从而得到基础解系，错误地认为这就是所求的特征向量，且检查多遍也找不出错在哪里. 一般地，可以要求学生只用行变换以回避出错.

4. 阶梯形（行最简形）矩阵的化简

阶梯形是线性代数的一个重要求解目标，许多问题都可归结为阶梯形，它的最大好处是便以求秩和求解. 涉及到的问题主要有：线性方程组的求解（含基础解系）与讨论、向量组的秩与极大无关组及其线性表示问题、逆矩阵、矩阵的秩、特征向量等求法，这些都是期末考必考内容. 经验表明，学生考得不好肯定与不会化阶梯形有关. 一定要引导学生熟练掌握阶梯形的化法，一般方法是：逐列按行非零首元从上而下化零（行最简形需再从下而上化零）；非零首元要尽量简单（最好是±1），避开或推迟分数运算.

5. 特征值特征向量的注意事项

（1）如何计算特征多项式$|A-\lambda E|$？（λ只出现在对角元；不能先化简A，再减去λE）

（2）求特征值，能不能列变换？求特征向量，能不能列变换？

（3）如何确定特征向量要求几个？对错怎么检查？

（4）特征向量一定非零（如果求出特征向量为零，一定是算错了）

6. 解题套路举例

线性代数存在一些解题套路，教学中可以加以引导. 比如

（1）涉及伴随矩阵问题，往往要利用到基本公式$AA^*=A^*A=|A|E$及其重要推论$|A^*|=|A|^{n-1}$.

（2）“拼凑”逆矩阵：

题型：已知n阶方阵A的某个多项式$f(A)=0$，证明与A有关的矩阵□可逆，并求$□^{-1}$.

比如$A^2-A-2E=0$，求$(A+2E)^{-1}=?$

解法：可把$f(A)=0$根据目标矩阵□进行“拼凑”因式，得到矩阵▲，满足□·▲$=E$（或▲·□$=E$）；利用待定系数法也是不错的方法.（学生典型错误举例）

（3）线性无关的常规证明：先假设向量组的线性组合为零，设法变形为与已知条件有关的等式，利用已知条件得出相关结果，最终推导出线性组合的系数全部为零.

二、强调易错点

易错点是学生容易犯错的地方，有的是作业中体现出来，更多的是往届学生经常出错的，学生自己往往没有意识到. 教学中必须及时强调易错点，意义是显然的.

1. 矩阵与行列式的基本区别

在符号、阶数、加法、数乘、乘法、转置等运算方式及其运算规律存在很大不同，易混淆.

	矩　阵	行 列 式
符号	（　　）或[　　]	|　|
运算结果	矩阵（表格）	数
阶数	行数不恒等于列数	行数恒等于列数（方阵才有行列式！）
加法	每一行（或列）对应相加	某一行（或列）对应相加（其余不动）
数乘	k 乘以每一行（或列）	k 乘以某一行（或列）
乘法	前矩阵的列数必须等于后矩阵的行数才能相乘；左乘、右乘不一样	左乘、右乘一样； 乘法运算规则和矩阵一样
乘法可交换	不成立	成立
转置	不恒等	恒等
化简符号	$\rightarrow$或 ~	=

2. 矩阵乘法交换律的不成立，导致矩阵的乘法性质与数的乘法存在许多不同之处，这往往是学生容易想当然而犯错的地方. 比如 $AB=0 \not\Rightarrow A=0 \;\; or \;\; B=0$，又如 $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ 所以要想方设法让学生深刻意识到乘法必须区分左乘、右乘.

3. 行列式计算常见的易错点

（1）展开后漏符号项、或者只有一个展开项；

（2）四阶（及以上阶数）按对角线法则展开；

（3）把一个行数、列数不相等的所谓“行列式”计算得煞有其事；

（4）$|A \pm B| = |A| \pm |B|$ 这个错误结论也是学生经常误用的. 比如误用

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

4. 线性方程组的通解

特解由原线性方程组求得，基础解系则由导出组求得，也就是说特解与常数项有关、求基础解系时与常数项无关（必须是零），学生容易保留常数项去求基础解系. 线性方程组是否有解，要把矩阵的秩与 n 作比较，特别要注意 n 的含义，它指未知数个数，也是系数矩阵的列数，但未必是行数、也未必是方程组的方程个数. 注意方程的个数与是否有解没有必然联系！

三、联系前后等价命题

值得强调的是，在线性代数中，有一个等价命题几乎贯穿着线性代数整个课程内容，即

n元齐次方程组$AX=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A_{sn})<n \Leftrightarrow$ A的列向量组线性相关$\overset{s=n}{\Leftrightarrow}|A|=0$（即$A$不可逆）$\Leftrightarrow$方阵$A$含有零特征值.

如果考虑这个结论及其逆否命题，用以下典型行列式为背景可构造出一系列类型题.

在国内《线性代数》《高等代数》经典教材中都有如下一道典型的行列式习题：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

由于行列式问题常常可以演化为线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵、特征值、二次型等问题，所以可在教学中进一步作变式，体现数学解题中的转化思想，通过变式探究、总结升华，培养学生灵活多变的思维品质. 这种变式题型在线性代数考研中也经常出现.

下例是我编制的一道具有一定综合性的系列题（用于课程期末考试）：

例 设$n\ (n\geq 2)$阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

①求行列式$|A|$；

②判定A的列向量组的线性相关性；

③讨论A的秩；

④确定当A的伴随矩阵A^*可逆时，a应该满足的条件；

⑤讨论齐次方程组$AX=0$的解，并求通解.